13/11/2021

3º φυλλάδιο

ασκ.1:

($\Longrightarrow$) $(X,d)$ συμπαγής. Έστω $\mathcal{F}=\{F_i\}_{i\in I}$ όπως στην εκφώνηση. Θέτουμε $\mathcal{A}=\{F_i^c\}_{i\in I}$.

Τότε, $\forall i_1,\dots,i_n\in I$, ισχύει ότι $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}\neq\emptyset$.

$\Longleftrightarrow \bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k}^c \subsetneq X$.

Θ.δ.ο. $\bigcap_{i\in I} F_i\neq\emptyset \Longleftrightarrow \bigcup_{i\in I} F_i^c\subsetneq X$.

Έστω ότι $\bigcup_{i\in I} F_i^c = X \Rightarrow \mathcal{A}$ ανοικτή κάλυψη του $X$

$\xRightarrow{X \text{ συμπαγής}} \exists i_1,\dots,i_n\in I$, τ.ω. $\bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k}^c = X$, άτοπο, άρα

$\bigcup_{i\in I} F_i^c \subsetneq X$.

($\Longleftarrow$) Έστω $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ ανοικτή κάλυψη του $X$. Έστω ότι $\nexists\, i_1,\dots,i_n \in I$, τ.ω. $\bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k} = X$, για κανένα $n \in \mathbb{N}$.

Τότε η οικογένεια $\mathcal{F} := \{A_i^c\}_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

Άρα (από υπόθεση), $\bigcap_{i\in I} A_i^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \subsetneq X$, άτοπο, άρα $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, i_1,\dots,i_n \in I$, τ.ω. $\bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k} = X \Rightarrow (X,d)$ συμπαγής. ☒

<u>ασκ. 2</u>: $\mathcal{A} = \{I_j\}_{j\in J}$, όπου $I_j$ υποδιάστημα της πραγματικής ευθείας, $\forall j \in J$ και $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \emptyset$, $\forall j_1, j_2 \in J$ με $j_1 \neq j_2$. Νδο η $\mathcal{A}$ είναι το πολύ αριθμήσιμη.

<u>Λύση</u>: Για $j \in J$, διαλέγουμε $q_j \in I_j \cap \mathbb{Q}$.

Η απεικόνιση $J \ni j \longmapsto q_j \in \mathbb{Q}$ είναι 1-1, γιατί αν $q_{j_1} = q_{j_2} \Rightarrow I_{j_1} \cap I_{j_2} \neq \emptyset \Rightarrow j_1 = j_2$

$\mathbb{Q}$ αριθμ. $J$ το πολύ αριθμήσιμο $\Rightarrow \mathcal{A}$ το πολύ αριθμήσιμη. ☒

άσκ 3: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αύξουσα. Νδο το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της $f$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

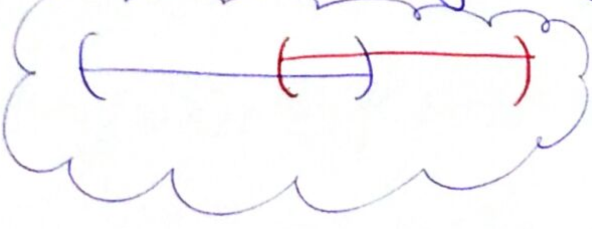
Λύση: Έστω $\xi\in\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) \le f(\xi) \le \lim_{x\to\xi^+} f(x)$$ (και $\lim_{x\to\xi^\pm} f(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$)

• Άρα, $f$ συνεχής στο $\xi$ αν-ν το σύνολο

$$I_\xi := \left(\lim_{x\to\xi^-} f(x), \lim_{x\to\xi^+} f(x)\right)$$ είναι κενό.

• Επίσης, αν $\xi_1<\xi_2$ και $I_{\xi_1}\cap I_{\xi_2}\neq\emptyset \Longrightarrow$



$$\lim_{x\to\xi_1^+} f(x) > \lim_{x\to\xi_2^-} f(x).$$

Όμως, $\forall\, \xi_1<x<y<\xi_2$, έχουμε

$$f(x)\le f(y) \Longrightarrow \lim_{x\to\xi_1^+} f(x) \le f(y), \quad \forall\, \xi_1<y<\xi_2$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\xi_1^+} f(x) \le \lim_{x\to\xi_2^-} f(x)$$, άτοπο

$\Rightarrow I_{\xi_1}\cap I_{\xi_2}=\emptyset \Rightarrow$ Η οικογένεια

$A:=\{I_\xi : I_\xi\neq\emptyset, \xi\in\mathbb{R}\}$ είναι οικογένεια ξένων ανά δύο μη κενών διαστημάτων $\overset{\text{άσκ.2}}{\Longrightarrow}$ Η $A$ είναι το πολύ αριθμήσιμη.

$\Longrightarrow$ Η $f$ έχει το πολύ αριθμήσιμου πλήθους σημεία ασυνέχειας. ☑

<u>ασκ. 4</u>: Νδο αν $A$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $A$ γράφεται ως το πολύ αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

<u>Λύση</u>: Για $x, y \in A$, ορίζουμε την σχέση $x \sim y$ αν-ν $[\min\{x,y\}, \max\{x,y\}] \subseteq A$. Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Έστω $\tilde{x}$ η κλάση ισοδυναμίας του $x \in A$, δηλ. $\tilde{x} = \{y \in A : x \sim y\}$.

• $\tilde{x}$ διάστημα: Έστω $y_1, y_2 \in \tilde{x}$ με $y_1 < y_2$. Αρκεί νδο. $[y_1, y_2] \subseteq \tilde{x}$. Όμως $y_1 \sim y_n \Rightarrow [y_1, y_2] \subseteq A \Rightarrow$

$$\forall\, y_1 < z < y_2, \quad [z, y_2] \subseteq A \Rightarrow$$

$$\forall\, y_1 < z < y_2, \quad z \sim y_2 \sim x \Rightarrow \forall\, y_1 < z < y_2,\ z \in \tilde{x}$$

$$\Rightarrow [y_1, y_2] \subseteq \tilde{x}.$$

• Θδο. το $\tilde{x}$ είναι ανοικτό διάστημα. Αρκεί νδο: $\inf\tilde{x}, \sup\tilde{x} \notin \tilde{x}$. Θέτω $M := \sup\tilde{x}$. Αν $M = \infty$, τότε $M \notin \tilde{x}$. Έστω ότι $M < \infty$. Αν $M \in \tilde{x}$, τότε $x \sim M \Rightarrow$

$$[x, M] \subseteq A \xRightarrow[M \in A]{A \text{ ανοικτό}} \exists\, \varepsilon > 0, \text{ τ.ω. } (M-\varepsilon, M+\varepsilon) \subseteq A \Rightarrow$$

$$[x, M+\varepsilon) \subseteq A \Rightarrow [x, M+\varepsilon/2] \subseteq A \Rightarrow$$

$$M+\varepsilon/2 \sim x \Rightarrow M+\varepsilon/2 \in \tilde{x}, \text{ άτοπο αφού } M = \sup\tilde{x}.$$

• $A = \bigcup_{x \in A} \tilde{x} \xRightarrow{\text{Ασκ. 2}}$ Το $A$ γράφεται ως το πολύ αριθμήσιμη ένωση ξένων (ανοικτών) διαστημάτων.

ξένη ένωση

# 4º φυλλάδιο

**ασκ.1**: $\{f_n\},\{g_n\}$ ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων από τον $(X,d)$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g$

Νδο αν $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f_n + \mu g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} \lambda f + \mu g$.

**Λύση**: $\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_\infty \leq$

$\lambda \cdot \|f_n - f\|_\infty + \mu \cdot \|g_n - g\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. ☒

**ασκ.2**: $\{f_n\}$ ακολουθία φραγμ. πραγματικών συναρτήσεων από έναν μετρικό χώρο $(X,d)$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f$ $\xRightarrow{?}$ $f$ φραγμένη.

**Λύση**:

Ναι, γιατί η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\|f_n - f_{n_0}\|_\infty \leq 1 \Rightarrow$

$\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}\|_\infty$

$\leq 1 + \|f_{n_0}\|_\infty < \infty$, $\forall n \geq n_0$. ☒

<u>ασκ.3</u>: $\{f_n\}, \{g_n\}$ ομ. φραγμένες, $f_n \xrightarrow{ομ.} f$, $g_n \xrightarrow{ομ.} g$.

Ν.δ.ο. $f_n g_n \xrightarrow{ομ.} fg$

<u>Λύση</u>: $\|f\|_\infty \leq \|f-f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty$.

Όμως, $\exists M>0$, τ.ω. $\|f_n\|_\infty, \|g_n\|_\infty \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \|f\|_\infty \leq \|f-f_n\|_\infty + M$

$\|f-f_n\|_\infty \to 0 \Longrightarrow \exists M'>0$, τ.ω. $\|f-f_n\|_\infty \leq M'$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\|f\|_\infty \leq M' + M =: N$

Άρα, $\|f_n g_n - f\cdot g\|_\infty = \|(f_n g_n - f g_n) + (f g_n - fg)\|_\infty$

$\leq \|(f_n - \ )g_n\|_\infty + \|f(g_n-g)\|_\infty$

$\leq \|f_n - f\|_\infty \cdot \|g_n\|_\infty + \|f\|_\infty \cdot \|g_n - g\|_\infty$

$\leq M\cdot\|f_n - f\|_\infty + N\cdot\|g_n-g\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. ▨

<u>ασκ 4</u>: $f_n \xrightarrow{ομ.} f$, $g_n \xrightarrow{ομ.} g \overset{;}{\Longrightarrow} f_n g_n \xrightarrow{ομ.} fg$

<u>Λύση</u>: Δεν ισχύει, γιατί π.χ.

$f_n(x) = x + \frac{1}{n} = g_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Τότε, θέτουμε $f(x) = x$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε, $\|f_n - f\|_\infty =$

$\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Longrightarrow f_n, g_n \xrightarrow{ομ.} f$

Όμως, $\|f_n g_n - f\cdot f\|_\infty = \|(x+\frac{1}{n})^2 - x^2\|_\infty =$

$\|x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} - x^2\|_\infty = \|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\|_\infty = \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \|f_n g_n - f\cdot f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

$\Longrightarrow f_n g_n \overset{\text{ομ.}}{\not\longrightarrow} f\cdot f$ . ▨

## 5ο φυλλάδιο

<u>ασκ 1:</u> $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}$ ακολουθία <u>συνεχών</u> συναρτήσεων, $f : X \to \mathbb{R}$. Αν $\forall\, K \subseteq X$ συμπαγές, $f_n|_K \xrightarrow{\text{ομ.}} f|_K$ νδο $f$ συνεχής.

<u>Λύση:</u> Έστω $\{x_n\} \subseteq X$ και $x \in X$, τ.ω. $x_n \to x$.

Τότε, το σύνολο $\{x_n\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές.

• $f_n|_K \xrightarrow{\text{ομ.}} f|_K \xrightarrow[\substack{\text{συνεχής} \\ \forall n \in \mathbb{N}}]{f_n|_K} f|_K$ συνεχής.

Η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι ακολουθία από το $K$ και $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in K \xRightarrow[\text{συνεχής}]{f|_K} f(x_n) \longrightarrow f(x)$

$\xRightarrow[\substack{\text{ορισμός συνέχειας} \\ \{x_n\}\text{ τυχούσα} \\ \text{συγκλίνουσα} \\ \text{ακολουθία από} \\ \text{τον } X.}]{\text{ακολουθιακός}}$ $f$ συνεχής. ▨

---

<u>ασκ 2:</u> $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, $f_n$ συνεχής $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq [a,b]$, τ.ω. $a_n \to a$, $b_n \to b$. Νδο

$$\int_{a_n}^{b_n} f_n \longrightarrow \int_a^b f$$

<u>Λύση:</u> $f$ συνεχής (από θεώρημα) $\Longrightarrow \|f\|_\infty < \infty$.

Θέτουμε $K := \|f\|_\infty$.

Επίσης, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \exists\, M > 0$, τ.ω. $\|f_n - f\|_\infty \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty$$
$$\leq M + K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- $$\left| \int_{a_n}^{b_n} f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f - \int_a^{a_n} f_n - \int_{b_n}^b f \right|$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq \|f_n - f\|_\infty} dx + \int_a^{a_n} |f_n(x)| dx + \int_{b_n}^b \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq \|f_n(x)\|_\infty} dx$$

$$\leq \|f_n - f\|_\infty (b-a) + (M+K)(a_n - a) + (M+K)(b - b_n)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0. \ \blacksquare$$

<u>ασκ. 3</u>: Καλύπτεται από ασκ. 7 φυλλάδιου 6.

<u>ασκ. 7</u>: Να βρεθεί $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, τ.ω. $f_n$ πουθενά συνεχής, $\forall n \in \mathbb{N}$ αλλά $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

<u>Λύση</u>: Παίρνουμε $f_n(x) = \frac{1}{n} \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Τότε $\|f_n - 0\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομ}} 0$, αλλά η $f_n$ δεν είναι πουθενά συνεχής, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

ασκ 8: $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}$ ομ. φραγμ., τ.ω. $f_n \xrightarrow{ομ} f$

Αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, νδο. $g \circ f_n \xrightarrow{ομ} g \circ f$

Λύση: • $\exists M > 0$, τ.ω. $\|f_n\|_\infty \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

• $g|_{[-M,M]}$ ομ. συνεχής

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists \delta > 0$, τ.ω

$\forall x, y \in [-M, M]$, με $|x-y| < \delta$, να ισχύει

$|(x) - (y)| < \varepsilon$

• $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|f_n(a) - f(a)| < \delta$,

$\forall a \in X$. $\xRightarrow[y=f(a)]{x=f_n(a)}$ $|g(f_n(a)) - g(f(a))| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

$\forall a \in X$. ☒

ασκ. 6 $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων

, τ.ω. $f_n \xrightarrow{ομ} f$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Νδο τα παρακάτω

όρια υπάρχουν και είναι ίσα:

$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$

Λύση: • $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ $\xRightarrow{f \text{ συνεχής}}$

$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x_0)$

• $\lim_{x \to x_0} f_n(x) \xlongequal{f_n \text{ συνεχής}} f_n(x_0)$

$\xRightarrow{f_n \to f}$ $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = f(x_0)$. ☒

άσκ 4: Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τ.ω.

$$\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx = 0 \quad , \forall g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ της μορφής}$$

$$g(x) = \min\{ax+b,\ cx+d,\ kx+l\}$$

Νδο $f\equiv 0$.

Λύση: Θέτουμε $g_n(x) = \min\{n(x-x_0), 0\}$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $x_0\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$.

$$\Longrightarrow g_n(x) = \begin{cases} n(x-x_0) & , 0\le x\le x_0 \\ 0 & , x_0 < x \le 1 \end{cases}$$

Τότε, $\int_0^1 f(x)\,g_n(x)\,dx = n\int_0^{x_0} f(x)(x-x_0)\,dx$

$$\Rightarrow \forall x\in[0,1],\quad n\int_0^x f(t)\cdot(t-x)\,dt = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^x t f(t)\,dt - x\int_0^x f(t)\,dt = 0$$

$$\overset{\prime}{\Longrightarrow} x f(x) - \int_0^x f(t)\,dt - x f(x) = 0 \quad , \forall x\in[0,1].$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt = 0 \quad , \forall x\in[0,1]$$

$$\overset{\prime}{\Rightarrow} f(x) = 0 \quad , \forall x\in[0,1]. \quad \blacksquare$$

# 6ο φυλλάδιο

**ασκ. 1:** $(X,d)$ συμπαγής μ.χ. $L \subseteq C(X)$ lattice.

Να δειχθεί ότι $\overline{L}$ lattice.

**Λύση:** $\overline{L}$ γραμμικός υπόχωρος του $C(X)$.

(το δείξαμε στην τάξη).

Έστω $f \in \overline{L}$. Τότε, $\exists \{f_n\} \subseteq L$, τ.ω.

$f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$. Αλλά, $|f_n| \in L$, $\forall n \in \mathbb{N}$, επειδή $L$

lattice $\xRightarrow{|f_n| \to |f|}$ $|f| \in \overline{L} \Rightarrow \overline{L}$ lattice. $\boxtimes$

---

**ασκ. 2:** $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, $\{f_n\}$ ισοσυνεχής,

όπου $f_n(x) = F(x^n)$. ΝΔΟ $F$ σταθερή.

**Λύση:** Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta > 0$, τ.ω.

$$\forall y \in (1-\delta, 1+\delta), \quad |f_n(1) - f_n(y)| < \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |F(1) - F(y^n)|$$

- Για $x \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$,

$$1 + \frac{x}{n} \in (1-\delta, 1+\delta)$$

$$\xRightarrow{y = x + \frac{1}{n}} \quad |F(1) - F(e^x)| \leq \varepsilon$$

$(x + \frac{1}{n})^n \to e^x$

$F((x+\frac{1}{n})^n) \to F(e^x)$

$n \to \infty$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(e^x) = F(1)$

$\overset{y=e^x}{\Longrightarrow} \quad F(y) = F(1), \quad \forall y > 0$

$\overset{F\text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} \quad -\,\|\,-, \quad \forall y \geq 0.$ ∎

---

άσκ. 3: $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ ομ. φραγμένη.

Αν $g_n(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$,

νδο η $\{g_n\}$ έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία.

Λύση: $\exists M > 0$ τ.ω. $|f_n(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$: Έστω $\varepsilon > 0$ & $x \in [a,b]$.

Τότε $|g_n(x) - g_n(y)| = \left| \int_x^y f_n \right| \leq$

$\left| \int_x^y \underbrace{|f_n|}_{\leq M} \right| \leq M \cdot |y - x|, \quad \forall y \in [a,b]$

- Θέτουμε $\delta := \frac{\varepsilon}{2M} \Longrightarrow$

$|g_n(x) - g_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \quad \forall y \in [a,b]$, με

$|x - y| < \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow \{g_n\}$ ισοσυνεχής στο $x$

$\overset{x\text{ τυχόν}}{\Longrightarrow} \{g_n\}$ ισοσυνεχής $\underset{\text{Ascoli}}{\overset{\text{Arzela}}{\Longrightarrow}}$ Η $\{g_n\}$ έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία. ∎

<u>ασκ. 4</u> Έστω $(X,d)$ συμπαγής μ.χ. και $A \subseteq C(X)$ ισοσυνεχές. Νδο το $A$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχές, δηλ. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, τ.ω. $\forall x,y \in X$, με $d(x,y) < \delta$, να ισχυει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$, $\forall f \in A$.

<u>Λύση</u>: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, για $x \in X$, $\exists \delta_x > 0$, τ.ω. $\forall y \in B(x, \delta_x)$, να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\forall f \in A$.

Όμως, $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta_x/2) \xrightarrow{X \text{ συμπαγής}}$

$\exists x_1, \dots, x_n$, τ.ω. $X = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\delta x_i}{3}\right)$.

Θέτουμε $\delta := \min\left\{\frac{\delta x_1}{3}, \dots, \frac{\delta x_n}{3}\right\} > 0$.

- Έστω $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$.

Τότε, $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$, τ.ω. $x \in B(x_i, \delta x_i/3)$, $y \in B(x_j, \delta x_j/3)$. Αλλά, $d(x_i, x_j) \leq$

$d(x_i, x) + d(x,y) + d(y, x_j)$

$\leq \frac{\delta x_i}{3} + \delta + \frac{\delta x_j}{3} \leq \max\{\delta x_i, \delta x_j\}$

$\Rightarrow |f(x_i) - f(x_j)| < \varepsilon/3$, $\forall f \in A$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, $\forall f \in A$, $\forall x,y \in A$ με $d(x,y) < \delta$. $\blacksquare$